1　数列の極限

今回は大学の微分積分学の初歩について話したいと思う．微分と積分の根底にある概念は極限である．まず高校までの極限の定義について見てみよう．

定義 1.1 (高校まで)**.** 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは，n を無限大にしたとき $\{a_n\}$ が限りなく α に近づくときを言う．

例えば数列 $a_n = 1/n$ は n を限りなく大きくしたとき 0 に収束する．これは直感的には明らかなことで，高校まではこのような直感を元にして極限を考えていてもよかった．しかし，それでは次の定理はどう証明すればよいだろう．

定理 1.1. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする．このとき数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

としたとき，数列 $\{b_n\}$ は α に収束する．

直感的には，n が大きいところで b_n はかなり a_n に近くなる（気がする）から成り立つとは思う．しかしこれは先ほどの例と比べて直感的ではないし、かなり非自明な主張である．このような非自明な問題と対面した時、先の定義は曖昧すぎるため何を示せば証明したことになるのかわからないだろう．

さて，曖昧さを無くし厳密な議論を展開するために，以下のように収束について定式化が成された．この定義は所謂 ϵ-N 論法と呼ばれるものである．

定義 1.2. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは，任意の正数 $\epsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq N$ で

$$|a_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つときを言う．

この定義は，$\{a_n\}$ が α に収束するとは，最初の方の番号の項はどうでもいいから，ある番号より先の方で $\{a_n\}$ が α に限りなく近ければよいということを言っている．この数列が収束するということの定式化は「無限大」や「限りなく」といった曖昧な表現を，我々がよく知っている有限の世界の言葉のみでうまく表現している．

さて、上で述べた定義を論理式で書くと

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

となる．このままではわからない人もいると思うので，ここで論理記号の説明をしよう．$\forall$ は「任意の」「全ての」という意味で $\exists$ は「存在する」という意味である．論理式は文字通り前から読むものであり，例えば以下の二つの論理式

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y = x^2$$

は全く違うことを主張している．前者は「任意の実数 x に対しある実数 y が存在して，$y = x^2$ となる」ということで，後者は「ある実数 x が存在して，全ての実数 y に対して $y = x^2$ が成り立つ」と言っている．確認はしないが，前者は真の命題で，後者は偽の命題である．

ここで次のアルキメデスの原理と呼ばれる公理「任意の正の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $b < aN$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する」は認めることにする．公理とは証明することなく使ってもよい事実のことである．この公理は以下の証明で必ず必要となってくる．

話を戻そう．ϵ-N 論法で大切なのは，ϵ は最初に任意に取ってきているが，N は ϵ に依存して取ってきているということである．何を言っているかわからないかもしれないので，例を見てみよう．

例 1.1． 数列 $a_n = 1/n$ が 0 に収束することを示す．任意に $\epsilon > 0$ を取る．$N \in \mathbb{N}$ を $N > 1/\epsilon$ を満たすように取る（1 と $1/\epsilon$ にアルキメデスの原理を用いた）．$n \geq N$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|a_n - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

となるので，数列 $a_n = 1/n$ は 0 に収束する．

見ての通り ϵ には何の制約もなく取ってきたが，N については ϵ に依存して取ってきたことがわかる．今回は簡単な例だったが、この方針，つまり定義通りの順番で文字を用意し示していくことは，どんなに複雑な数列の極限であったとしても同じである．この証明の流れや論理が理解できず挫折した人をそれなりに見てきたので，これを読んでいる人には最低限「任意に $\epsilon > 0$ を取って」「適当な番号 N を見つけて」「ある番号から先での差の絶対値を ϵ で抑える」という流れで証明することだけは心に留めていてほしい．繰り返すが，定義通りにやれば難しいことは何もないのである．

さて，それでは ϵ-N 論法を用いて最初の方で述べた定理を証明してみよう．任意に $\epsilon > 0$ を取る．このときある $N_1 \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq N_1$ で

$$|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ．ここで $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|$ のうち一番大きな数を a とおく．N_2 を

$$\frac{2N_1}{\epsilon}(a + \alpha - \frac{\epsilon}{2}) < N_2$$

を満たすように取る（ここもアルキメデスの原理である）．N_1, N_2 のうち大きい方を N とおく．このとき $n \geq N$ にて

$$\begin{aligned}
|b_n - \alpha| &= |\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1} + \cdots + a_n}{n} - \alpha| \\
&= |\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{(a_{N_1+1} - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} - \frac{N_1}{n}\alpha| \\
&\leq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n} + \frac{N_1}{n}\alpha && (1) \\
&\leq \frac{N_1 a}{n} + \frac{(n - N_1)\epsilon}{2n} + \frac{N_1}{n}\alpha && (2) \\
&= \frac{N_1}{n}(a - \alpha - \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{N_1}{N_2}(a - \alpha - \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} && (3) \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

となる．以上より定理は示された．ただし（1）は三角不等式，（2）は $|a_i| \leq a\ (i = 1, 2, \ldots, N_1)$ と問題の仮定，（3）は N_2 の取り方から成り立つ．N を N_1, N_2 のうち大きい方とした理由は，そう取ることで（2）（3）が同時に成り立つような n の範囲にできるからである． □

2 関数の連続性

先ほどは数列の収束について厳密な定義を与えた．次は関数の連続について厳密な定義を与える．以下が所謂 ϵ-δ 論法である．

定義 2.1. 関数 f が $x = a$ で連続であるとは，任意の正数 $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ があって

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つときを言う．f が定義域全体で連続であるとき単に連続であると言う．

これを論理式で書くと

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

となる．この論理式の意味は先ほどと同じように読めばよい．つまり「任意の正数 ϵ に対しある $\delta > 0$ があって，$|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ が成り立つ」ということである．

例 2.1. 例を一つ見てみよう．$f(x) = \sin x$ が $\mathbb{R}$ 上連続であることを示す．ただし任意の $h \in \mathbb{R}$ に対し不等式 $|\sin h| \leq |h|$ が成り立つことは証明なしに用いる．任意に $\epsilon > 0$ を取る．$\delta > 0$ を $\delta < \epsilon$ を満たすように取る．$|x - a| < \delta$ にて

$$|\sin x - \sin a| = |2 \sin \frac{x - a}{2} \cos \frac{x + a}{2}| \leq |2 \frac{x - a}{2}| = |x - a| < \delta < \epsilon$$

となるので，$f(x) = \sin x$ は連続である．

これも簡単な例であったが，やはり重要なのは定義の順番通り証明を進めることであった．つまり「任意の $\epsilon > 0$ を取り」「適当な δ を見つけて」「行き先の差の絶対値を ϵ で抑える」ということである．

3 おまけ

最後におまけで，応用として線形代数で習う基底の取り替え行列が連続であることを示す（本当にただのおまけなので読み飛ばしてもらっても構わない）．そのためにまずは用語の準備を行う．数を長方形に並べたものを行列という．正確には A を行列としたとき

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように書く．行列の横の列を「行」，縦の行を「列」と言って，行の数が m，列の数が n の行列を m 行 n 列行列，$m \times n$ 行列などと言う．A を $(a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$ のように表すこともある．以下では $n = m$ とし $n \times n$ 行列を単に行列と呼ぶ．$(a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ は (a_{ij}) と書くことにする．

行列の積を次のように定義する．二つの行列 $A=(a_{ij})$ と $B=(b_{ij})$ の積 AB を

$$AB=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})$$

と定める．つまり

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

である．

事実として，実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ には n 個の $\mathbb{R}^n$ の元 $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}^n$ からなる基底 $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ が存在する．確認しておくと，$\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ が基底とは

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\Rightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

が成り立ち，$\mathbb{R}^n$ のどんな元 $x\in\mathbb{R}^n$ も

$$x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

と書けるときを言う．

基底は一意ではない．すなわち基底は複数存在して，例えば $\mathbb{R}^2$ において

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\},\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$$

はいずれも $\mathbb{R}^2$ の基底である．

さて，$\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ と $\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底としよう．このとき $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ は基底だから

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \qquad\vdots \\ y_1=a_{n1}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{cases}$$

と書ける．これを行列表示すると

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

となる（確認せよ）．このときに現れる行列を基底の取り替え行列と言う．これを A とおくと上式は

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

と書ける．この A が連続であることを示そう．つまり任意の正数 $\epsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在して，$x,y\in\mathbb{R}^n$ に対し

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|Ax-Ay|<\epsilon$$

が成り立つことを示せばよい．ただしここでの $|\cdot|$ は通常の距離とする．

任意に $\epsilon > 0$ を取る．このとき $\delta > 0$ を

$$\delta < \frac{\epsilon}{n\sqrt{n}a}$$

を満たすように取る．$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し $|x - y| < \delta$ とする．$|x_i - y_i|$ のうち一番大きいものを $|x^{'} - y^{\,'}|$ とし，$|a_{ij}|$ で一番大きいものを a とおく．特にこのとき

$$|x^{'} - y^{\,'}| \leq |x - y| < \delta$$

が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned}
|Ax - Ay| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j))^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j - y_j|)^2} && (4) \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a|x' - y'|)^2} && (5) \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(na|x' - y'|)^2} \\
&= \sqrt{n(na|x' - y'|)^2} \\
&= n\sqrt{n}a|x^{'} - y^{'}| \\
&< n\sqrt{n}a\delta && (6) \\
&< \epsilon && (7)
\end{aligned}$$

となる．ただし（4）は絶対値を取った方が根号の中身が大きくなることから，（5）は a と $|x^{'} - y^{\,'}|$ の最大生から従う．（6）（7）は δ の取り方から従う．以上より A は連続である． □

この証明で A が基底の取り替え行列であるという事実はどこにも用いていない．つまり任意の行列は連続である．しかしここで基底の取り替え行列を出した理由は，特に説明しないが $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への全単射となっているからである．これは基底の取り替え行列が同相写像であることを意味している．